8 класс

1. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной «особой» точки.

   Решение. Для доказательства достаточно заметить, что при перекрашивании любой «особой» точки в другой цвет число отрезков с разноцветными концами уменьшается по крайней мере на 1. Поэтому перекрашивание удается произвести только конечное число раз, после чего не остается ни одной особой точки.

2. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т.д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?

   Ответ: единиц получится на одну больше, чем двоек.

   Решение. Всякое число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому единицы получаются из чисел 1, 10, 19, 28, . . . , 999 999 991, 1 000 000 000, а двойки – из чисел, дающих в остатке 2, т. е. из чисел 2, 11, 20, 29, . . . , 999 999 992.

3. Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два различных положительных корня, а если в другом порядке, то два различных отрицательных корня?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть у трёхчлена $ax^2 + bx + c$ два отрицательных корня x_1 и x_2. Тогда $b/a = -(x_1+x_2) > 0$ и $c/a = x_1x_2 > 0$, то есть числа b и c того же знака, что и число a. Допустим, как-то переставив коэффициенты, мы получили уравнение с двумя положительными корнями. Но тогда частное от деления коэффициента при x на коэффициент при x^2 должно было бы стать отрицательным, а частное от деления двух чисел одного знака положительно. Противоречие.

4. Два тролля Том и Берт поймали Бильбо и предложили ему сыграть в игру. У каждого из них есть мешок с белыми, желтыми и черными камнями. Том начинает игру и кладет на стол некоторое количество камней из своего мешка. Затем Берт кладет на стол камни из своего мешка. После этого Бильбо делает то же самое. После этого они начинают делать ходы. На каждом ходу игрок выбирает два камня различного цвета, убирает их со стола и кладет на их место камень цвета, отличного от цветов выбранных камней. Игра заканчивается, когда камни только одного цвета остаются на столе. Если остаются камни белого цвета, то выигрывает Том и он съедает Бильбо. Если остаются камни желтого цвета, то выигрывает Берт и он съедает Бильбо. Если остаются камни черного цвета, то выигрывает Бильбо, и его отпускают. Можете ли вы помочь Бильбо сохранить жизнь и предложить ему выигрышную стратегию?

   Решение. Бильбо должен положить на стол такое количество камней, чтобы количество черных камней на столе стало нечетным, а количества белых и желтых камней – четными (либо наоборот, сделать количество черных камней четным, а количества белых и желтых камней – нечетными). Тогда количества белых и желтых камней будут иметь одинаковую четность, а количество черных камней – отличную от них четность. После каждого хода игроков четность камней всех трех цветов на столе будет меняться. Как бы игроки ни ходили, четность белых и желтых камней будет все время оставаться одинаковой, а четность черных камней будет оставаться отличной от них. В конечной позиции количество камней двух цветов равно нулю, то есть имеют одинаковую четность, значит этими цветами будут белый и желтый. Потому оставшиеся на доске камни будут черными. Бильбо побеждает.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника АКВ, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

Первое решение. Отложим на продолжении BC за точку C отрезок $CN = LC$ (см. рис. 1). Тогда $CB + CL = NB$, и нам надо доказать, что $AB = NB$. Так как четырёхугольник $ABLK$ вписан, имеем $\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle ALB = \angle ALC$. С другой стороны, прямоугольные треугольники ACL и ACN равны по двум катетам, так что $\angle ANC = \angle ALC = \angle CKB = 90^\circ - \angle B/2$. Тогда из треугольника ABN имеем $\angle BAN = 180^\circ - \angle B - \angle ANB = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \angle B/2) = 90^\circ - \angle B/2 = \angle ANB$. Из полученного равенства $\angle ANB = \angle BAN$ и следует, что $AB = NB$.

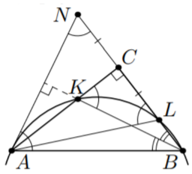

Рис. 1

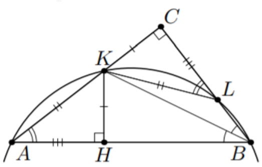

Рис. 2

Второе решение. Опустим из точки K перпендикуляр KH на гипотенузу AB (см. рис. 2). Прямоугольные треугольники KCB и KHB равны по гипотенузе и острому углу ($\angle KBC = = \angle KBH$). Значит, $CB = HB$ и $KC = KH$. Далее, в окружности, описанной около $AKLB$, на хорды AK и KL опираются равные углы, поэтому $AK = KL$. Значит, прямоугольные треугольники KHA и KCL равны по катету и гипотенузе, откуда $HA = CL$. Итак, $CB+CL = HB+HA = AB$, что и требовалось доказать.

6. Существуют ли такие натуральные числа x и y, для которых $x^2 + y$ и $y^2 + x$ – квадраты целых чисел?
Ответ: таких чисел x и y нет.
Решение. В самом деле, пусть $x \geq y$. Тогда $x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x + 1)^2$, т. е. $x^2 + y$ не является полным квадратом.