

Условия задач для 8 класса

Время на выполнение задания – 4 часа

За каждую правильно решенную задачу дается 7 баллов

1. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая «особая» точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной «особой» точки.
2. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т.д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?
3. Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два различных положительных корня, а если в другом порядке, то два различных отрицательных корня?
4. Два тролля Том и Берт поймали Бильбо и предложили ему сыграть в следующую игру. У каждого из них есть большой мешок с камнями трех цветов – белого, желтого и черного. Том начинает игру и кладет на стол некоторое количество камней из своего мешка. После него Берт кладет на стол камни из своего мешка. Затем Бильбо делает то же самое. После этого они начинают поочередно делать ходы. На своем ходу, каждый игрок выбирает на столе любые два камня двух различных цветов, убирает их со стола и кладет на их место из своего мешка камень третьего цвета (то есть отличного от двух цветов выбранных камней). Игра заканчивается тогда, когда на столе остаются камни только одного цвета. Если остаются камни белого цвета, то выигрывает Том и он съедает Бильбо. Если остаются камни желтого цвета, то выигрывает Берт и он съедает Бильбо. Если остаются камни черного цвета, то выигрывает Бильбо, и его отпускают. Можете ли вы помочь Бильбо сохранить жизнь и предложить ему выигрышную стратегию?
5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника АКВ, пересекает вторично сторону ВС в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.
6. Существуют ли такие натуральные числа x и y , для которых $x^2 + y$ и $y^2 + x$ – квадраты целых чисел?