6 класс

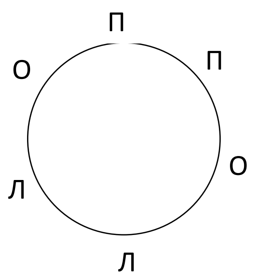
1. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из А в В, другой — из В в А. Они встретились в полдень (т. е. ровно в 12 часов) и, не прекращая движения, пришли: один — в В в 4 часа вечера, а другой – в А в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?
   Ответ: в 6 утра.
   Решение. Точку встречи обозначим за С. Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Скорость первого пешехода на участке АС равна АС/x, на участке ВС равна ВС/4. Его скорость постоянна, и значит АС/x = ВС/4, что можно переписать в виде АС/ВС = x/4. Аналогично для второго пешехода: равенство скоростей на участках ВС, АС выльется в соотношение ВС/x = АС/9, которое мы перепишем в форме АС/ВС = 9/x. Получаем, что x/4 = 9/x, и по свойству пропорции $x^2 = 36$, x = 6. Рассвет был на 6 часов раньше полудня, т. е. в 6 утра.

2. На столе лежат 100 монет, 10 из которых лежат гербом вверх, остальные - вниз. Вам нужно с завязанными глазами разделить их на две части таким образом, чтобы в обеих частях оказалось одинаковое количество монет, лежащих гербом вверх (части могут быть неравными). При этом Вы можете переворачивать любое количество монет. Вы не знаете, какие монеты лежат вверх гербом.

   Решение
   Отделим от 100 монет любые 10 монет и перевернем их. Если среди выбранных монет оказалось N монет гербом вверх, то в остальной части таких монет 10 – N. При переворачивании 10 монет количество монет, лежащих гербом в обеих частях становится одинаковым.

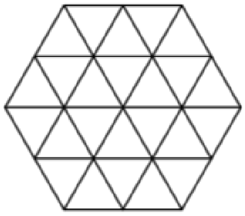
3. Шесть гномов сидят за круглым столом. Известно, что ровно два гнома всегда говорят правду, и они сидят рядом. Кроме этого, ровно два гнома всегда врут, и они тоже сидят рядом. Оставшиеся два гнома могут как врать, так и говорить правду, и они не сидят рядом. Искатель сокровищ ходит вокруг стола и спрашивает гномов, где они спрятали золото.
   - Первый гном сказал, что в пещере.
   - Второй сказал — на дне озера.
   - Третий сказал — в замке.
   - Четвёртый сказал — в сказочном лесу.
   - Пятый сказал — на дне озера.

   Где гномы спрятали золото? Ответ нужно обосновать.
   Ответ: в пещере.
   Решение. У нас есть два гнома, которые всегда говорят правду. Назовём их правдивыми гномами (на рисунке обозначается буквой П). Есть два гнома, которые всегда врут. Назовём их лжецами (на рисунке обозначается буквой Л). И есть два гнома, которые могут и врать, и говорить правду. Назовём их обычными гномами (на рисунке обозначается буквой О). Из условия задачи следует, что расположение гномов следующее:

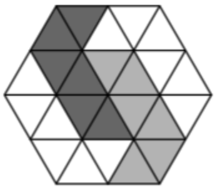


   Так как два правдивых гнома сидят подряд, у нас должно быть два одинаковых ответа подряд. Но такого нет, значит, правдивыми гномами будут либо первый и шестой гномы, либо пятый и шестой. Но напротив каждого правдивого гнома сидит лжец, поэтому пятый гном не может быть правдивым (так как второй гном ответил то же самое, что и он). Таким образом, первый и шестой гном правдивые. Значит, золото спрятано в пещере.

4. Разрежьте нарисованный на рис. 3 шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



Ответ. См. рис. Комментарий. Решение единственно с точностью до поворотов и отражений.



5. Числа от 1 до 2019 записаны на доске. Два случайно выбранных числа стираются и заменяются на их разность, таким образом количество чисел в ряду уменьшается на единицу. Процесс повторяется до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое это число – четное или нечетное? Объясните ответ.

Ответ: четное
Решение. Ряд чисел от 1 до 2019 содержит 1009 четных и 1010 нечетных чисел. Рассмотрим три случая:
1) Если оба стираемых числа четные, то они заменяются на их разность, которая является четным числом. При этом количество нечетных чисел в ряду не изменяется.
2) Если одно из стираемых чисел четное, а другое нечетное, то они заменяются на нечетное число (их разность – нечетна). Количество нечетных чисел не изменяется.
3) Если оба стираемых числа нечетные, то они заменяются на четное число (разность двух нечетных чисел – четное число). При этом количество нечетных чисел в ряду уменьшается на 2.
Таким образом, на каждом шагу количество нечетных чисел либо не изменяется, либо уменьшается на 2. Так как в начале количество нечетных чисел было четным, то оно будет оставаться четным всегда, и в конце нечетных чисел будет 0, так как 0 – наименьшее четное число.
Следовательно, когда на доске останется одно последнее число, то оно будет четным.

6. В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

Ответ: 11.
Решение. Обозначим количество квартир на этаже за К, количество этажей за Э и количество подъездов за П. По условию, $1 < К < Э < П$. Число 715 можно разложить на большие единицы множители единственным способом: $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Значит, $К = 5$, $Э = 11$, $П = 13$.